

基于相密度的混沌吸引子可视化方法研究

陈洪亮 谭建荣

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 杭州 310027)

摘要 针对以往混沌子可视化方法存在的某些局限,提出了相密度定义从而对吸引子在相空间中的分布情况进行了全局性的定量描述,并为混沌吸引子可视化提供了有效的参考与控制.另外,基于相密度实现的混沌吸引子体绘制可视化方法与 Lyapunov 谱特征可视化方法,还从不同角度揭示了混沌行为的整体变化情况以及局部相空间中混沌系统的基本特征,并在丰富混沌吸引子可视化内容与形式的同时,降低了可视化过程的复杂性.

关键词 非线性 混沌吸引子 图形 可视化

中图法分类号: TP391 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2001)05-0475-06

The Research on Strange Attractor Visualization Based on Phase-Density

CHEN Hong-liang, TAN Jian-rong

(State Key Lab. Of CAD&CG Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract This paper puts forward the definition of phase-density to quantificationally describe how the attractor distributes in the phase-space, which provides effective foundation and control for strange attractor visualization. The phase-density can be calculated as the proportion of the number of phase points fallen into the vessel-box which is positioned around each phase-space point, thus clearly denote the denseness of attractor distribution around that point. Based on the phase-density, the volume rendering and Lyapunov spectra rendering of strange attractor visualization can unveil the total chaotic behavior and local attributes of strange attractor respectively. During the attractor volume visualization, the source instension and the attenuation coefficient are both defined as nonlinear component according to the average phase-density, and the image-ordered algorithm is adopted to reduce the expensive computation. During the Lyapunov spectra visualization, the initial iterative point-pair is first picked up automatically according to the phase-density, and the adaptive growing-up algorithm of flow pipe (or flow ribbon) can be implemented recursively from each initial point-pair. The given typical strange attractor visualization examples demonstrate that the content and form of strange attractor visualization are enriched with the complexity is depressed.

Keywords Non-linear, Strange attractor, Graphics, Visualization

0 引言

随着非线性科学研究的突飞猛进,混沌理论在生物工程、动力系统、噪音控制等自然科学与工程科学研究领域中,均得到了广泛的应用与关注,其中,

混沌吸引子(奇异吸引子)作为混沌系统整体稳定性与局部不稳定性共同作用下的产物,深刻地反映了确定与随机、简单与复杂、有序与无序、整体与局部等不同混沌机理的重要转化过程,全面揭示了不同应用背景下混沌现象的本质特征.

然而,许多传统研究手段在处理混沌吸引子问

题时,仍然采用非线性数值逼近的基本方法,由于其数值计算的结果往往只能以枯燥的数据形式,而不是形象直观地来反映吸引子的各项混沌属性,因此,在某种程度上阻碍了工程技术人员对各类混沌现象本质的深刻理解与全面洞察.自从 Poincaré 提出吸引子相空间的几何分析思想^[1]以来,混沌吸引子的图示方法与可视化技术逐渐开始得到重视,但总体进展仍然相当缓慢^[2].

Lauterborn 等人在声音气穴的实验研究中,发现了其中存在着倍周期以及 3 周期的分叉现象^[3],并随着驱动频率的改变而呈现出不同的吸引子形状,同时还以全息照片与图表的形式进行了显示;Elizabeth Bradley 等人在非线性控制系统的设计中,通过对吸引子轨迹的动态搜索重构出相空间中的混沌路径^[2],从局部出发表现吸引子的内部特性;Pradhan 等人从吸引子的 Lyapunov 指数入手对睡眠阶段脑电波模式的混沌特性进行了研究^[4],并采用二维图表的方式对分析结果进行可视化;Principe 等人则利用关联维数的定义来描述轨道的分歧程度,并由不同的投影变换来形成一系列的二维轨迹图^[5].

但经过仔细分析可以发现,上述混沌吸引子可视化方法均不同程度地存在着某些局限,即未能从整体上对吸引子的可视化方法作出如下系统性的研究:①从形式来看,二维投影或简单图表所能反映的混沌信息都相当有限,而全息照片又无法对抽象的物理信息进行表达;②从内容来看,由于轨迹图只能从局部出发对相空间中的混沌行为进行刻画,因而难以揭示初值敏感性等混沌现象基本特征.从实现过程来看,由于缺乏对吸引子相空间的定量描述,因此计算时只能始终保持较小的迭代步长,以避免混沌吸引子中各分叉特征的破坏.

为了克服上述局限,本文在引入容器盒概念的基础上,提出了混沌吸引子的相密度定义和基于相密度的混沌吸引子可视化方法,从而较好地解决了前人混沌吸引子可视化方法存在的某些局限.

1 基于容器盒的混沌吸引子相密度

混沌吸引子,又称“奇异吸引子”、“随机吸引子”,它是由确定性动力系统产生的非周期性运动过程演变.该动力系统的迭代形式可统一描述为

$$[x_1^{n+1}, x_2^{n+1}, \dots, x_m^{n+1}] = f([y_1, y_2, \dots, y_s], [x_1^n, x_2^n, \dots, x_m^n]) \quad (1)$$

其中, $[y_1, y_2, \dots, y_s]$ 组成 s 维的参数空间, $[x_1, x_2, \dots, x_m]$ 组成 m 维的相空间.一般动力系统在迭代过程中,经过大量分叉后,其周期逐渐趋向无穷,即以一种随机的方式确定地形成了混沌吸引子.为了能够从整体上对吸引子在相空间中的分布情况进行定量描述,本文基于容器盒的定义给出混沌吸引子相密度的概念,其用数学语言描述为:

设 $X = [X^0, X^1, \dots, X^n]$ 为经过式(1) n 次反复迭代后所形成的混沌吸引子相空间集合,同时对相空间中的每一点 $X^A = A = [a_1, a_2, \dots, a_m]$,定义以 A 为中心、 ϵ 为边长的 m 维立方体为 A 点处所对应的容器盒, $N(A, \epsilon)$ 为容器盒中落入的相点数,于是基于容器盒的混沌吸引子相密度 $\rho(A)$ 表示成:

$$\rho(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{N(A, \epsilon)}{n} \right\} \quad (2)$$

由此可见,相密度 $\rho(A)$ 始终是一个 $[0, 1]$ 范围内的小数,它表征了混沌吸引子在 A 处的相点密集程度,随着 n 的增大和 ϵ 的减小, $\rho(A)$ 的准确度相应增强,且始终满足 $\sum_{i=0}^n \rho(X^i) \equiv 1$ 的归一性条件,其具体计算过程可采用如下的迭代算法进行逼近:

① 设定当前的迭代总次数 i_{total} ,一般建议 $i_{\text{total}} > 10\,000\,000$;

② 在相空间中,随机选择 $X^0 = [a_1^0, a_2^0, \dots, a_m^0]$ 作为初始迭代向量,并将当前迭代向量 X_{current} 设为 X^0 ,其中,迭代次数标识 $iN = 0$;

③ 取一充分小的容器盒精度 ϵ ,在相空间中建立起 $(L_1/\epsilon) \times (L_2/\epsilon) \times \dots \times (L_m/\epsilon)$ 个初始值为 0 的容器盒计数器数组 $\text{Container}[]$,其中, L_m 表示第 m 维相空间的长度;

④ 判断当前迭代向量 X_{current} 所在的容器盒位置 v_{current} ,并修改该位置上的容器盒计算器值为 $\text{Container}[v_{\text{current}}] + 1$;

⑤ 对 X_{current} 向量以式(1)进行迭代,获得迭代后的向量 X_{iterated} ;

⑥ 将 X_{current} 重设为 X_{iterated} ,并判断 $iN++$ 是否超过给定值,若超过,则在 $\text{Container}[]$ 与 i_{total} 之间进行归一化,并结束混沌吸引子相密度的计算,若未超过,则继续执行步骤④.

2 基于相密度的吸引子体绘制方法

本文提出的基于容器盒的混沌吸引子相密度定

义,将整个相空间张成一个密度场模型.假设任一容器盒微元 A 内部均匀分布着相密度 $\rho(A)$,并根据 $\rho(A)$ 的大小为容器盒 A 分配相应的源强度 C_A 与衰减系数 t_A ,则吸引子在不同区域中的混沌行为可以通过体绘制的形式来进行整体刻画(以下均假设相空间的维数 $m=3$,若 $m>3$,则可利用变量分离的方法,在多个视图的绘制结果中,共同展现超维吸引子的混沌特性).该绘制模型可以简单表述为

$$C = C_0 + \sum_{i=1}^n (t_{A(0)} t_{A(1)} \cdots t_{A(i-1)}) C_{A(i)} \quad (3)$$

式中, C_0 为体绘制的原始光强; $C_{A(i)}$ 与 $t_{A(i)}$ 分别为与容器盒 $A(i)$ 对应的源强度与衰减系数, n 表示从视点出发沿光线方向需采样的容器盒个数.其中, $t_{A(i)} \in [0, 1]$, $t_{A(i)} = 0$ 表示微元 A 对最终显示不产生影响;而 $t_{A(i)} = 1$ 则表示 A 在光线投射过程中不发生衰减.

在混沌吸引子体绘制过程中,需在源强度、衰减系数与相密度之间建立起恰当的映射关系,才能有效地显现各个区域的混沌属性,也就是说,若只是在相密度值与 C_A, t_A 之间建立简单的线性映射关系,将势必由于相密度的非均匀一致分布 ($\rho(A) \rightarrow 0$ 或 $\rho(A) \rightarrow 1$ 的区域均非常稀薄)而导致不同源强度与衰减系数映射结果对比度的降低,进而削弱混沌吸引子可视化结果的可绘制性与可理解性.笔者注意到混沌吸引子相密度值在相空间中的分布往往是以 $\bar{\rho}$ 为对称轴的高斯分布,其大部分相密度值均落入以 $\bar{\rho}$ 为对

称轴的 λ 截集中(如图 1(b)阴影区域所示),且与相密度集合对应的容器盒数同样在整个分布中占了绝大多数(如图 1(a)所示,其中, n 为相空间中的容器盒总数),为此,本文将基于平均相密度 $\bar{\rho}$ 的 λ 截集对源强度与衰减系数的非线性映射定义如下:

$$C(\rho) = C^0 + F(\rho)(C^1 - C^0) \quad (4)$$

$$t(\rho) = t^0 + F(\rho)(t^1 - t^0) \quad (5)$$

$$F(\rho) = \begin{cases} 0 & \rho \leq \bar{\rho} - \lambda \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2\lambda} (\rho - \bar{\rho}) & \bar{\rho} - \lambda < \rho < \bar{\rho} + \lambda \\ 1 & \bar{\rho} + \lambda < \rho \end{cases} \quad (5)$$

其中, $F(\rho)$ 为关于 ρ 的单调增函数, λ 为相密度截集宽度,一般可选 $\lambda = 0.3 \sim 0.4\bar{\rho}$, 平均相密度 $\bar{\rho}$ 的计算式为

$$\bar{\rho} = \sum_{i=1}^n \rho(X^i) / i_{\text{valid}} (\text{根据归一性条件}) \equiv 1 / i_{\text{valid}} \quad (6)$$

其中, i_{valid} 为非空的有效容器盒数,一般地 $i_{\text{valid}} < (L_1/\epsilon) \times (L_2/\epsilon) \times (L_3/\epsilon)$.

为获得吸引子混沌行为的完整描述,需在密布着容器盒的相空间中进行反复多次的迭代(参见上节),由于数据量较大,因此采取图象空间为序的体绘制方法,以尽可能提高绘制速度,其算法简单描述为:

```
for (i=0; i<当前屏幕像素 X 方向宽度; i++){
  for (j=0; j<当前屏幕像素 Y 方向宽度; j++){
    fRayInput[i, j]记录每个像素上的光线方向(在预处理中完成);
    将 fRayInput[i, j]转化为当前视域空间中的光线方向 fRayDirection;
    根据采样间隔 fSampleDist 计算沿 fRayDirection 方向步长增量 fRayIncrement[0~2];
    根据 fRayIncrement 计算沿 XYZ 轴的最大增量方向,记入 iLargestIncIndex 中;
    计算沿 fRayDirection 方向的最近点与最远点
    while (当前光线与相空间容器盒有交){
      按 iLargestIncIndex 所对应的方向计算需采样点数 iNumSamples;
      对 fRayDirection 方向上 iNumSamples 个容器盒,根据其相密度大小利用式(4)(5)(6)计算当前像素的合成光强;
    }
  }
}
```

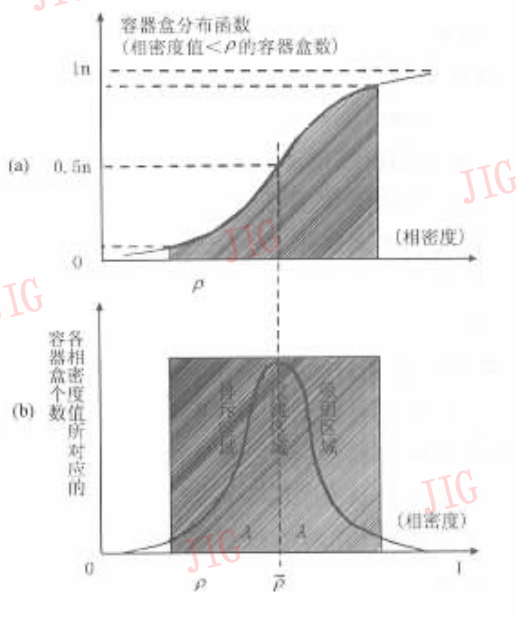


图 1 相密度与容器盒的对应关系

3 基于相密度的 Lyapunov 谱特征可视化

在混沌动力系统中,不同方向上迭代轨迹收敛

或发散的比率可以用 Lyapunov 指数 (λ) 来进行描述, 在高维系统中多个 Lyapunov 指数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 共同组成了 Lyapunov 谱, 其中, λ_i 表征了第 i 个方向上局部相空间的混沌特性. 由于混沌吸引子的 Lyapunov 谱特征是对不同局部相空间中扩张与收缩属性的刻画, 可以对混沌系统的基本特征进行整体判定, 因此在混沌研究中起着非常重要的作用. 然而在实际应用中, Lyapunov 谱特征繁琐的计算过程却给混沌吸引子本质特征的全面理解带来了很大困难, 如一维相空间中的指数需按下式进行计算

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 \left(\prod_{i=1}^{n-1} f'(x_i) \right) \quad (7)$$

而在高维系统中 Lyapunov 谱特征计算则更为复杂.

为此, 本文从可视化的角度出发, 以混沌吸引子相空间中不同初始点对的短期演变行为作为绘制对象, 并基于混沌吸引子的相密度分布, 提出了初始点对的自动提取算法与自适应的流线(流带)生长算法, 从而实现了以定性的方式直观地揭示 Lyapunov 谱特征在不同方向上所蕴涵的混沌属性.

3.1 基于相密度的初始点对自动提取

混沌吸引子 Lyapunov 谱中各个方向上的特征属性可以通过不同类型初始点对的短期迭代行为来进行描述, 如在三维相空间中其对应了如下的 3 类初始点对的迭代行为:

① 吸引子不同轨迹上相互靠近的初始点对的迭代行为;

② 吸引子同一轨迹上两个相互靠近的初始点对的迭代行为;

③ 吸引子不同区域(吸引区域与非吸引区域)中初始点对的迭代行为;

为避免相空间中初始点对的人工选取, 本文基于相密度的空间分布对上述 3 类初始点对作出如下的数学描述, 以便施行后继的自动提取算法:

(1) 要求初始点对 $X_{1,2}$ 满足 $\Delta_{1,2}(\rho(X)) < d_\rho^{(1)} \rho$, $\sum_{i=0}^2 D_{1,2}(X^i) \approx d_X^{(1)} \cdot \max_{j=0,1,2} (L_j)$, 其中, $d_\rho^{(1)}$ 与 $d_X^{(1)}$ 分别代表了相密度的偏差系数与空间距离的偏差系数, 一般可取 $d_\rho^{(1)} = 0.2 \sim 0.3$, $d_X^{(1)} = 0.02 \sim 0.03$;

(2) 要求初始点对 $X_{1,2}$ 满足 $X_2 = f(X_1)$;

(3) 要求初始点对 $X_{1,2}$ 满足 $\Delta_{1,2}(\rho(X)) > d_\rho^{(3)} \bar{\rho}$, $\sum_{i=0}^2 D_{1,2}(X^i) \approx d_\rho^{(3)} \cdot \min_{j=0,1,2} (L_j)$, 其中 $d_\rho^{(3)} =$

$1.1 \sim 1.2$, $d_X^{(3)} = 0.4 \sim 0.5$;

其中, 空间距离约束又可进一步转化为容器盒之间的间隔关系, 即 $i_{\text{Interval}}^{(1)} = \text{int}(d_X \cdot \max_{j=0,1,2} (L_j) / \epsilon)$ 或 $i_{\text{Interval}}^{(3)} = \text{int}(d_X \cdot \min_{j=0,1,2} (L_j) / \epsilon)$, 于是初始迭代点对的自动提取过程可以描述为:

① 在相空间中随机生成一初始迭代点 A^0 , 并获得该点的相密度值 $\rho(A^0)$ 和所在的容器盒序列号 $i_{\text{CurrentVessel}}$ (为在搜索过程中避免出现过多的无效容器盒, 要求 A^0 不落在相空间的排斥区域中);

② 类型 1: 在当前容器盒 $i_{\text{CurrentVessel}}$ 周围, 先以 i_{Interval} 为搜索间距, 并沿 X, Y, Z 不同方向计算候选容器盒的相密度梯度值, 再以最小梯度方向选取下一容器盒 $i_{\text{NextVessel}}$, 继续步骤③;

类型 2: 直接通过迭代计算来获得另一初始迭代点 B^0 , 结束搜索;

类型 3: 在当前容器盒 $i_{\text{CurrentVessel}}$ 周围, 先以 i_{Interval} 为搜索间距, 沿 X, Y, Z 不同方向计算候选容器盒的相密度梯度值, 再以最大梯度方向选取下一容器盒 $i_{\text{NextVessel}}$, 继续步骤③;

③ 判断 $i_{\text{NextVessel}}$ 所对应的容器盒是否满足给定的初始点相密度条件, 若满足, 则在容器盒 $i_{\text{NextVessel}}$ 中随机生成一相空间点作为 B^0 , 并结束搜索; 若不满足, 则令 $i_{\text{CurrentVessel}} = i_{\text{NextVessel}}$, 继续执行步骤②;

在类型 3 的 Lyapunov 谱初始点对搜索过程中, 由于 i_{Interval} 的初始值较大, 往往需要多次反复才能获得满足条件的初始点对, 因此可将步骤②拆分为多次搜索, 以增加搜索过程中对于方向选择的自由度, 即每次搜索时均以梯度最大方向选取下一次搜索起点, 若搜索间距之和大于 i_{Interval} 则重新执行步骤①. 由于在相密度的基础上施行如上的 Lyapunov 谱初始点对自动提取算法, 一般情况下仅需在相空间中进行几十次试采样, 即可获得所需的初始点对, 其平均耗时仅在 0.1s 左右, 因而可以保证自动提取的实时性.

3.2 基于相密度的流管(流带)自适应生长

为了能直观可视地表现 Lyapunov 谱特征中所蕴涵的各类混沌属性, 必须以三维空间中的流管或流带形式来对局部相空间中不同类型的混沌行为进行可视化描述, 同时通过初始点对迭代轨道的指数分离程度来定性地表征出该方向上相体积发散、平衡或收敛的比率(分别对应于 Lyapunov 指数 $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ 或 $\lambda < 0$ 的情形), 并基于几何影响因子与相密

度影响因子的定义,实现了流线(流管)的自适应生长控制,从而降低了 Lyapunov 谱特征可视化过程的复杂性。

几何影响因子 $f_{\text{GeometryFactor}}$ 主要用于控制最终的可视化效果,其中流管形式的几何影响因子则采取同线度方式进行计算(如图 2(a)所示),而流带形式的几何影响因子则采取共面度方式进行计算(如图 2(b)所示),分别定义为 $f_{\text{CollinearFactor}}$ 与 $f_{\text{FacetFactor}}$

$$f_{\text{CollinearFactor}} = d(P^{i+2}, \overline{P^i P^{i+1}}) / |P^i P^{i+1}| \quad (8)$$

$$f_{\text{FacetFactor}} = d(A^i, A^{i+1}, B^i, B^{i+1}) / f_{\text{PeriDist}} \quad (9)$$

其中,函数 $d(P^{i+2}, \overline{P^i P^{i+1}})$ 为点到线的距离函数, P_i 表示流管的迭代过程中第 i 个迭代点; $d(A^i, A^{i+1}, B^i, B^{i+1})$ 表示由第 i 次迭代点对迭代后所产生的空间四边形的共面距离, f_{PeriDist} 为该空间四边形的周长。

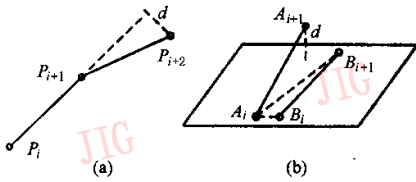


图 2 几何影响因子的计算方法

相密度影响因子 $f_{\text{IntensityFactor}}$ 主要用于对吸引区域与排斥区域加以区分,一般情况下,由于吸引区域中的 Lyapunov 谱特征结构要比排斥区域精细得多,因此将 $f_{\text{IntensityFactor}}$ 定义为 $\rho/\bar{\rho}$, 以实现吸引区域中步长的自适应减小与排斥区域中步长的自适应增加。

在几何影响因子与相密度影响因子的共同作用下,基于相密度的流管(流带)自适应生长算法可简单描述为:

① 利用初始迭代点对自动提取算法(参见 3.1 节)获得 A^0, B^0 ;

② 给定一基准迭代步长 $f_{\text{GivenStep}}$, 取当前时间步长 $f_{\text{StepT}} = f_{\text{GivenStep}}$ (由于混沌吸引子的迭代形式大都以时间微分形式给出,因此迭代步长取为时间步长);

③ 类型 1、类型 3: 以 f_{StepT} 对 A^i, B^i 进行迭代获得 A^{i+1}, B^{i+1} (初始时 i 为 0);

类型 2: 以 f_{StepT} 对 A^i 进行迭代, 获得 A^{i+1} , 再将 B^{i+1} 设为以 A^{i+1} 为起点, 并沿固定方向偏移 $|A^i A^{i+1}|$ 距离(初始时 i 为 0)以避免迭代前后的轨迹重合;

④ 用 $A^i, B^i, A^{i+1}, B^{i+1}$ 来计算相密度影响因子 $f_{\text{IntensityFactor}}$ 与几何影响因子 $f_{\text{GeometryFactor}}$, $f_{\text{StepT}} = f_{\text{GivenStep}} \times f_{\text{IntensityFactor}} / (1 + f_{\text{GeometryFactor}})$;

⑤ 根据 $A^i, B^i, A^{i+1}, B^{i+1}$ 的空间位置绘制相应的流管段或流带段;

⑥ 若尚未满足迭代终止条件, 则令 $A^i = A^{i+1}$, $B^i = B^{i+1}$ 继续执行步骤③, 否则结束。

在基于相密度的流管或流带自适应生长算法中, 对于步长的控制是一个后反馈过程, 即始终将当前的影响因子作用于下一次迭代过程中。由于相密度的空间分布具有连续性, 因而这种后反馈式的步长控制同样可以保证最终的绘制效果, 并且能够避免本次迭代结果的反复修改, 从而能提高实时绘制的速度。这种基于相密度的流管(流带)生长算法所实现的 Lyapunov 谱特征可视化, 虽不能精确反映 Lyapunov 指数值的大小, 但已经足以完成对吸引子混沌行为的定性分析, 并能帮助工程技术人员对局部相空间中的收缩与扩张行为进行充分理解。

4 实例与结论

本文以 Lorenz 吸引子、Rossler 吸引子等典型混沌现象为例, 并以相密度为基础, 分别采取体绘制方式或流管(流带)方式实现了混沌吸引子的可视化;

图版 III 图 1(a) 与图 1(b) 即为 Lorenz 吸引子的体绘制结果和相密度为 $\bar{\rho}$ 的等值面绘制结果, 由图版 III 图 1 可见, 浅色透明区域表示容器盒的采样空间范围, 而相密度的 λ 截集分布则对应着淡青色到深棕色之间的非均匀过渡, 其中, 深棕色区域标识了 Lorenz 吸引子的两个吸引性不动点。图版 III 图 2(a) 与图 2(b) 为 Rossler 吸引子的体绘制结果和相应的 $\bar{\rho}$ 等值面绘制结果。

图版 III 图 3(a) 至图版 III 图 3(c) 显示了与不同参数空间对应的 Lorenz 吸引子混沌行为的变化情况, 其中 $\sigma = 10, b = 2.67$, 图版 III 图 3(a) 的 $r = 16$ 、图版 III 图 3(b) 的 $r = 22$ 、图版 III 图 3(c) 的 $r = 28$ 。由图版 III 图 3 可见, 随着参数 r 的不断增大, 混沌行为在奇异不变集附近漫游的时间越来越长, 并最终螺旋地趋向于吸引性不动点。

图版 III 图 4~图 6 中的(a)和(b)分别是采用流管与流带形式, 对 Lorenz 吸引子的第 1 类、第 2 类和第 3 类 Lyapunov 谱特征进行可视化(迭代轨迹的起始区域映射为红色、终止区域映射为黄色), 以表现出不同方向上吸引子的混沌行为特征。

图版 III 图 4 显示了相互靠近的两条流管迅速分离, 流带带宽迅速增加的吸引子混沌行为特征, 表示

局部相空间的长期行为对初始条件敏感($\lambda > 0$);图版 III 图 5 显示了流管间距与流带带宽既不放大,也不收缩的吸引子特征混沌行为特征,对应着系统的稳定边界($\lambda = 0$);图版 III 图 6 则显示了偏离吸引区域的流管迅速向吸引区域的流管靠拢,流带带宽以指数速度递减,相空间体积表现为局部收缩($\lambda < 0$)的吸引子混沌行为特征。

图版 III 图 7 进一步表现了第 1 类 Lyapunov 谱特征中初始迭代点对的轨迹形成过程,从图版 III 图 7(c)开始,轨迹迅速发生分离,导致了系统不具备长期可预测性。

上述实例表明,本文提出的基于相密度的混沌吸引子可视化方法具有如下特点:

(1) 基于容器盒的相密度定义能够定量地对相空间中的混沌行为进行描述,并能为混沌吸引子的可视化过程提供有效的参考依据与控制手段;

(2) 混沌吸引子体绘制方法能够基于相密度对体绘制中的参数映射进行控制,并能全面地展现混沌行为在相空间中的整体分布;

(3) Lyapunov 谱特征可视化方法能够基于相密度对初始点对进行自动提取,并能对迭代步长进行自适应控制,还能直观地揭示局部相空间在不同方向上蕴涵的混沌属性;

由此可见,本文在丰富混沌吸引子可视化内容与形式的同时,降低了可视化过程的复杂性,从而有效地帮助研究人员对混沌吸引子的本质特征作出了更为深刻、更为全面的理解。

参 考 文 献

1 Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. Journal de Math, 1881,7:375.

- 2 Elizabeth Bradley, Feng Zhao. Phase-space control system design. In: IEEE Symposium on Computer-Aided Control System Design. John James ed. Napa, California: IEEE Control Systems Society. 1992:68~75.
- 3 Lauterborn W, Holzfuss J, Billo A. Chaotic behavior in acoustic cavitation. In: IEEE Ultrasonics Symposium. M. Levoy, S. C. Schneider and B. R. McAvoy eds. Cannes, France: the Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. 1994:801~810.
- 4 Pradhan N, Narayana Dutt D, Sadasivan P K *et al.* Analysis of the chaotic characteristics of sleep EEG patterns from dominant Lyapunov exponents. In: Proceedings of the First Regional Conference IEEE Engineering in Medicine & Biology Society and 14th Conference of the Biomedical Engineering Society of India. Sujoy K. Guha ed. New Delphi, India: Indian Institute of Technology. 1995,3.79~3.80.
- 5 Jose C Principe, Fan S Yu, Steven A Reid. Display of EEG chaotic dynamics. In: First Conference on Visualization in Biomedical Computing. Norberto F. Ezquerro ed. Atlanta, Georgia: IEEE Computer Society Press. 1990:346~351

陈洪亮 1973 年生,博士研究生.主要研究方向为工程信息可视化、计算机辅助设计与计算机图形学.

谭建荣 1954 年生,教授,博士生导师,浙江大学机械及能源学院副院长,浙江大学机构工程与自动化系主任,中国图象图形学报编委.主要研究领域为产品信息建模、计算机辅助设计与计算机图形学、工程信息可视化.



(a) 体绘制

(b) 等值面绘制

图 1 Lorenz 吸引子可视化结果

(a) 体绘制

(b) 等值面绘制

图 2 Rossler 吸引子可视化结果

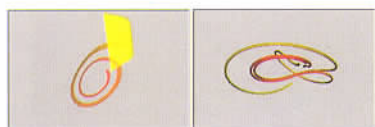


(a) $r=16$

(b) $r=22$

(c) $r=28$

图 3 不同参数空间映射下 Lorenz 吸引子的形成过程可视化 ($\sigma = 10, b = 2.67$)



(a)

(b)

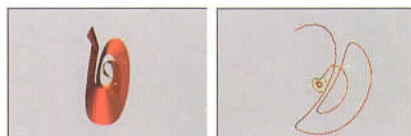
图 4 第 1 类 Lyapunov 谱特征可视化



(a)

(b)

图 5 第 2 类 Lyapunov 谱特征可视化



(a)

(b)

图 6 第 3 类 Lyapunov 谱特征可视化



(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

图 7 第 1 类 Lyapunov 谱特征的形成过程可视化